الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2024

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 5 بطاقات متماثلة مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 ، 3 ، 3 ويحتوي صندوق U_2 على 6 كريّات متماثلة موزّعة كما يلي: 4 كريات حمراء و 2 خضراوان (لا نفرّق بين البطاقات ولا بين الكريّات باللّمس).

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق U_1 :

– إذا تحصّلنا على الرقم 1 نسحب عشوائيا من U_2 كريّة واحدة.

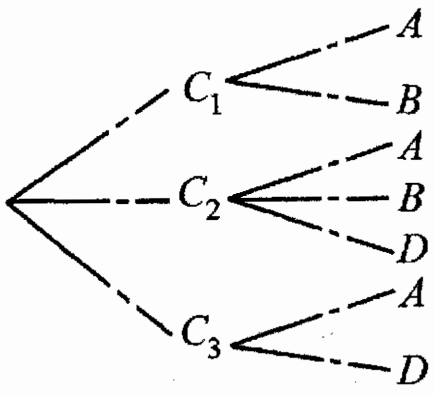
– وإذا تحصّلنا على الرقم 2 نسحب عشوائيا من U_2 كريّتين في آن واحد.

– وإذا تحصّلنا على الرقم 3 نسحب عشوائيا من U_2 ثلاث كريّات في آن واحد.

نعتبر الحوادث الآتية، C_i : « البطاقة المتحصّل عليها تحمل الرقم i » حيث $i \in \{1;2;3\}$

A : « الحصول على كريّات حمراء فقط » ، B : « الحصول على كريّات خضراء فقط »

D : « الحصول على كريّات ليست كلّها من نفس اللون »



1) أ) بيّن أنّ: $P_{C_2}(B)=\dfrac{1}{15}$ و $P_{C_3}(D)=\dfrac{4}{5}$

ب) انقل واملأ شجرة الاحتمالات المقابلة.

جـ) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(D)$

2) احسب احتمال أن تكون البطاقة المتحصّل عليها تحمل الرقم 3 علما أنّ الكريّات المسحوبة حمراء.

3) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب عدد الألوان المتحصّل عليها.

– عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ احسب الأمل الرياضياتي $E(75X+1917)$

4) إذا كان عدد الكريّات الحمراء في الصندوق U_2 هو $n+4$ حيث n عدد طبيعي.

– جِد قيمة n التي من أجلها يكون $P_{C_3}(A)=\dfrac{7}{15}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) أ) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z-8+6i)(z^2-2z+4)=0$

ب) جِد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8-6i$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=iz_A$ و $z_C=-z_A$

1) تحقّق أنّ: $z_A-z_B=i\left(z_C-z_B\right)$ ثمّ بيّن أنّ المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

2) أ) اكتب كلّا من z_A ، z_B و z_C على الشّكل المثلثي.

ب) استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ، يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

3) النقطة D هي نظيرة B بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

– بيّن أنّ الرباعي $ABCD$ مربع.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ... $7x-13y=29$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ) عيّن الحلّ الخاص $(x_0\,;\,y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقّق: $x_0-3y_0=3$

ب) استنتج حلول المعادلة (E)

جـ) عيّن الثنائيات $(x\,;\,y)$ حلول المعادلة (E) والتي من أجلها يكون: $|x-y-5|\leq 6$

2) أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

ب) بيّن أنّ العدد $2024\times 3^{1445}+2023^{4n+2}+9^{2n+3}$ يقبل القسمة على 5

3) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث: $\begin{cases} n\equiv 0[4] \\ 3^{x+y}+19\times 3^n-2n\equiv 0[5] \end{cases}$ و $(x\,;\,y)$ حلّ طبيعي للمعادلة (E)

4) A عدد طبيعي يُكتب $\overline{5\alpha 2\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 حيث α و β عددان طبيعيان و $0<\beta<\alpha$

– جِد α و β حتى يكون: $A\equiv 4[5]$ ثمّ اكتب A في النظام العشري.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) يُمثّل الجدول المقابل تغيّرات الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=(8-4x)e^x+16$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	16 ↗	$g(1)$	↘ $-\infty$

– أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث $2{,}37<\alpha<2{,}38$

ثمّ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x+4x}{e^x+4}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ وفسّرها هندسيا.

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x+4)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$

ب) ادرس الوضع النّسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ)

4) أ) ارسم (Δ) و (C_f) (نأخذ: $f(\alpha)\simeq 1{,}4$)

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m حتى تقبل المعادلة $f(x)=\ln(m)$ حلّين مختلفين.

5) أ) أثبت أنّه: من أجل كلّ x من $[1;+\infty[$ ، $\dfrac{e^x}{e^x+4}\le f(x)\le x$

ب) $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=1$ ، $x=2$

– بيّن أنّ: $\ln\left(\dfrac{e^2+4}{e+4}\right)\le \mathcal{A}\le \dfrac{3}{2}$

6) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=(e^n+4)f(n)$

– احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 4 من 6 إلى الصفحة 6 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 7 كريّات منها: 3 كريّات بيضاء و 4 كريّات حمراء ويحتوي صندوق U_2 على 7 كريّات منها: كريّتان بيضاوان و 5 كريّات حمراء (جميع الكريّات متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس)

نلقي نردا متوازنا أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 ونسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

– إذا ظهر رقم مضاعف للعدد 3 ، نسحب عشوائيا من الصندوق U_1 كريّتين على التوالي دون إرجاع.

– في الحالات الأخرى، نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريّتين على التوالي دون إرجاع.

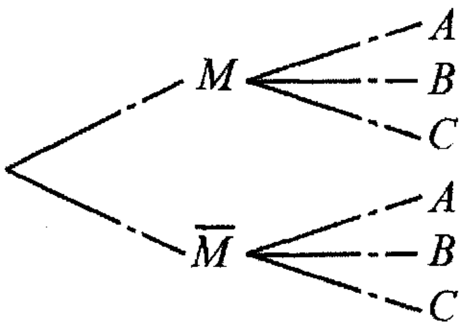
نعتبر الحوادث الآتية:

M : « ظهور رقم مضاعف للعدد 3 »

A : « الحصول على كريّتين بيضاوين »

B : « الحصول على كريّتين حمراوين »

C : « الحصول على كريّتين من لونين مختلفين »



1) انقل واملأ شجرة الاحتمالات المقابلة.

2) نعتبر الحادثتين G :« الحصول على كريّتين من نفس اللون » ، H :« الحصول على كريّة حمراء على الأقل »

– بيّن أنّ: $P(G)=\dfrac{31}{63}$ ثمّ احسب $P(H)$

3) احسب $P_G(M)$ احتمال ظهور رقم مضاعف للعدد 3 علما أنّ الكريّتين المسحوبتين من نفس اللون.

4) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب لكريّتين عدد الألوان المتحصّل عليها.

– عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ احسب الأمل الرياضياتي $E(63X+1350)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $(z^2+2i)(z^2-2\sqrt{3}z+6)=0$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=1-i$ ، $z_B=-z_A$ و $z_C=\sqrt{3}(1+i)$

1) اكتب كلّا من z_A ، z_B و z_C على الشّكل المثلثي.

2) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشّكل الجبري ثمّ المثلثي وبيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) أ) عيّن لاحقة النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ثمّ احسب نصف قطرها.

ب) النقطة D هي نظيرة C بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

– بيّن أنّ الرباعي $ACBD$ معيّن.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ... $7x-8y=2$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ) حلّ المعادلة (E) علما أنّ الثنائية $(6\,;5)$ حلّ لها.

ب) نضع: $d=PGCD(x\,;y)$ و $m=PPCM(x\,;y)$ حيث $(x\,;y)$ حلّ للمعادلة (E)

– جِد القيم الممكنة للعدد d ثمّ عيّن الثنائيات $(x\,;y)$ بحيث يكون: $d=2$ و $m=510$

2) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $a=8n+6$ و $b=8n^2-18n-10$

أ) تحقّق أنّ: $b=(n-3)a+8$ ثمّ بيّن أنّ: $PGCD(a\,;b)=PGCD(a\,;8)$

ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $PGCD(a\,;b)=2$

3) A و B عددان طبيعيان يُكتبان $\overline{7676}$ و $\overline{101}$ على الترتيب في نظام التعداد ذي الأساس α

و C عدد طبيعي يكتب $\overline{88}$ في نظام التعداد ذي الأساس β

أ) بيّن أنّ: $A=B\times C$ تكافئ $(\alpha^2+1)(7\alpha-8\beta-2)=0$

ب) عيّن أصغر قيمة لكلّ من العددين α و β حتى يكون $A=B\times C$ ثمّ اكتب B في النظام العشري.

جـ) اكتب العدد 197 في نظام التعداد ذي الأساس 12

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدّالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+x^2\ln x$

– ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ احسب $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $]0\,;+\infty[$

II) f الدّالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(0)=0$ ومن أجل كلّ $x>0$ ، $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2\ln x}$

(C_f) التمثيل البياني للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بيّن أنّ f تقبل الاشتقاق عند 0 على اليمين وفسّر النتيجة هندسيا.

جـ) ادرس الوضع النّسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (T) ذي المعادلة $y=x$

2) أ) تحقّق أنّه: من أجل كلّ $x>0$ ، $f'(x)=\dfrac{1-x^2-x^2\ln x}{(1+x^2\ln x)^2}$

ب) ادرس إشارة كلّ من العبارتين $1-x^2$ و $-x^2\ln x$ على $]0;+\infty[$ ثمّ استنتج إشارة $f'(x)$

جـ) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

3) أ) ارسم (T) و (C_f)

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=m^2$ حلّا على الأقل.

4) أ) بيّن أنّه: إذا كان $1 \le x \le e$ فإنّ $\frac{x}{x^2+1} \le f(x) \le 1$

ب) $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=1$ ، $x=e$

– بيّن أنّ: $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right) \le \mathcal{A} \le e-1$

5) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\frac{1}{f(e^n)}-ne^n$

أ) تحقّق أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{1}{e^n}$

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

انتهى الموضوع الثاني